I FRATTALI

Ducci, Ferrari, Griffo,
Mugnai, Pintilii

Frattale noto come "Albero di Pitagora"
disegnato per la prima volta dal matematico olandese E. Bosman intorno al 1942.

Indice degli argomenti

- Cosa sono i frattali?
- Dimensione frattale
- Costruzioni di particolari frattali
- Insiemi di Julia
- Mandelbrot ed il suo insieme
- Applicazioni

Che cosa sono i frattali?

Il termine “frattale” è stato coniato dal matematico Mandelbrot nel 1975 e deriva dal latino “fractus”, ossia “rotto”,”spezzato”. Mandelbrot definiva così i frattali :

‘Un frattale è un oggetto geometrico fatto di parti in un certo senso simili al tutto’

I frattali sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi all’infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. Ingrandendo un particolare di un frattale si ottiene un’immagine che ha la stessa forma della figura di origine. Questa proprietà, chiamata “autosimilitudine”, è quella che caratterizza i frattali.
In generale si considera frattale un insieme F che goda di tutte o molte delle seguenti proprietà:

1. Autosimilarità o Autosomiglianza
2. Struttura fine
3. Irregolarità
4. Dimensione frattale

DIMENSIONE FRATTALE

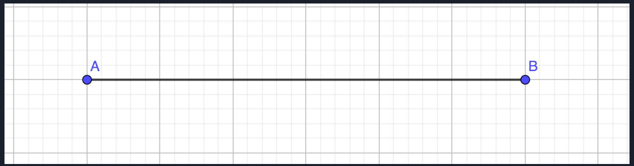
Frattale : oggetto autosimile

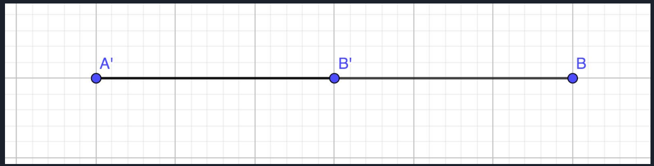
- Si parte da un oggetto in cui possiamo distinguere n coppie autosimili;
- Ciascuna di queste coppie si ottiene tramite un' omotetia di rapporto ρ.

Per definizione deve essere verificato che : $n = (1/\rho)^D$

Facciamo qualche esempio :

1) segmento → oggetto unidimensionale → D = 1



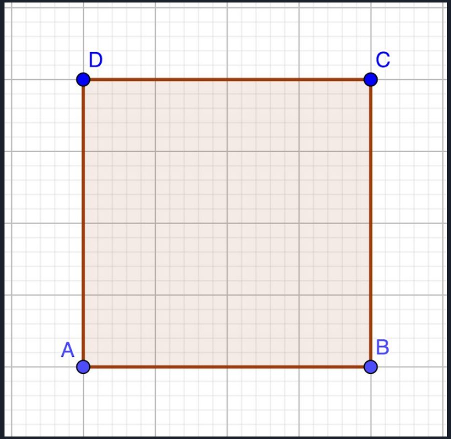


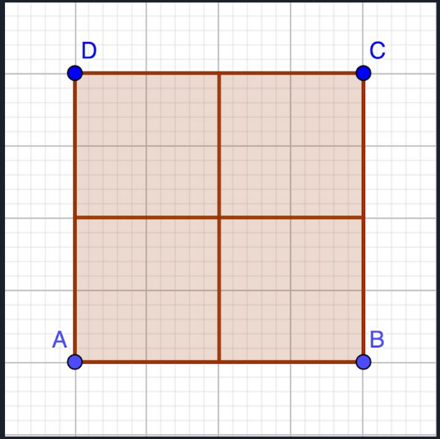
n = 2

ρ = 1/2

$$n = (1/\rho)^D \rightarrow 2=(1/½)^D \rightarrow 2=(2)^1 \rightarrow 2=2$$

2) quadrato → oggetto bidimensionale → D=2





$n = 4$

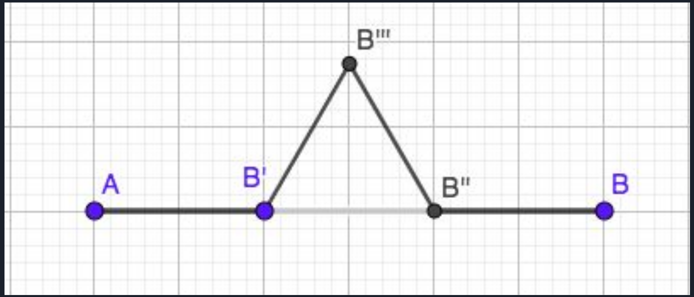
$\rho = 1/2$

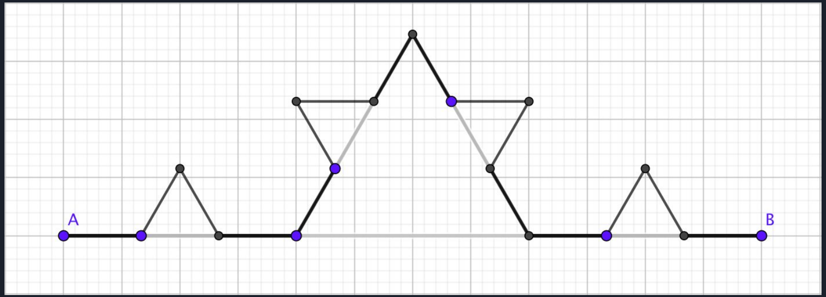
$$\mathbf{n = (1/\rho)^D} \to 4 = (1/½)^2 \to 4 = (2)^2 \to 4 = 4$$

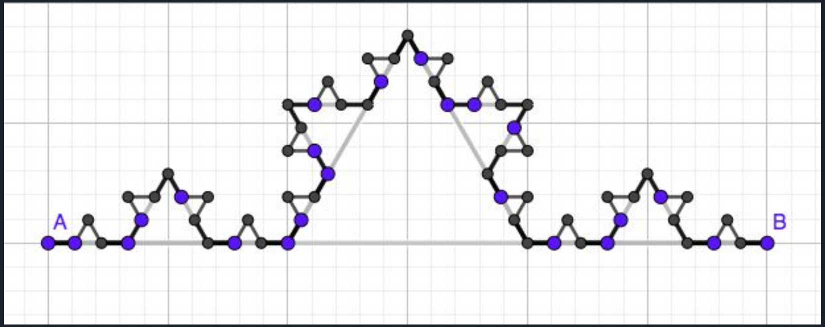
Il fiocco di neve di Koch (1870-1924)

La Curva di Koch è una delle prime curve frattali di cui si conosce la descrizione. Essa apparve per la prima volta in un documento del 1904 del matematico svedese **Helge von Koch**.

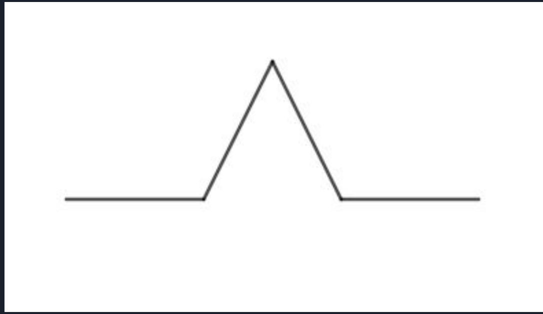
Proviamo a riprodurre la costruzione di questo frattale, creando una “macro” con il software Geogebra:







Qual è la dimensione del fiocco?



$n = 4$

$\rho = 1/3$

$n = (1/\rho)^D \longrightarrow 4=(1/⅓)^D \longrightarrow 4=(3)^D$

Quindi avremo che la dimensione D del nostro frattale sarà :

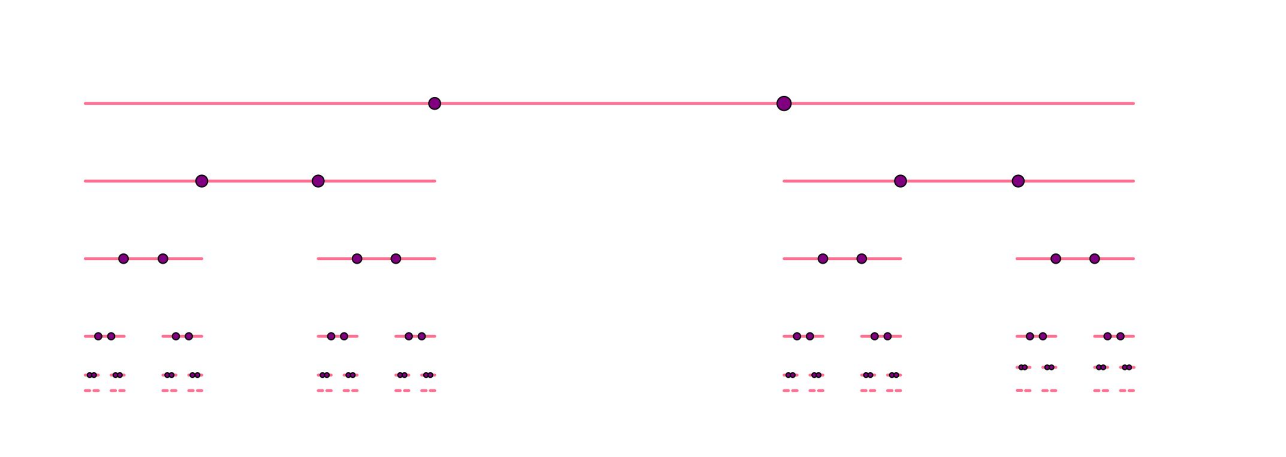
$D = \log_3 4 \rightarrow D = (\log 4)/(\log 3) \rightarrow D = 1{,}26$

Dato l'esempio precedente, possiamo dedurre che la dimensione D di un oggetto frattale risulta :

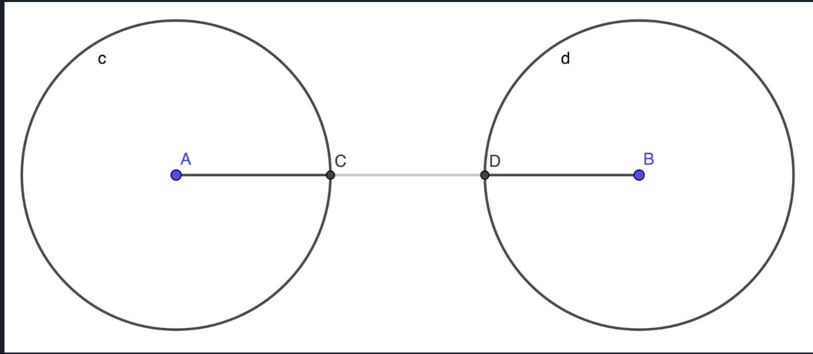
$n = (1/\rho)^D \longrightarrow D=\log(n)/\log(1/\rho)$

La polvere di Cantor (1845/1918)

La polvere di Cantor è un ente geometrico che si costruisce a partire da un segmento di lunghezza unitaria, ripetendo alcune operazioni in successione. E' considerato il primo frattale della storia della matematica ed è il più semplice dei frattali costruiti in modo ricorsivo.



Come si costruisce la polvere di Cantor?



$n = 2$

$\rho = 1/3$

$D=\log(n)/\log(1/\rho)$ $\rightarrow$ $D = \log 2/\log 3 = 0{,}63$

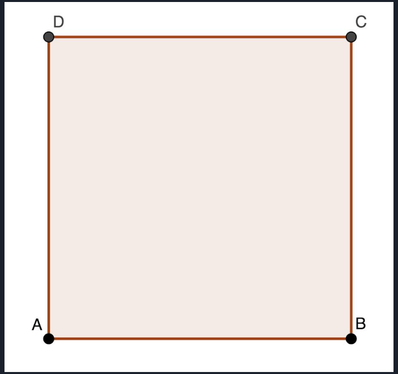
La scatola frattale

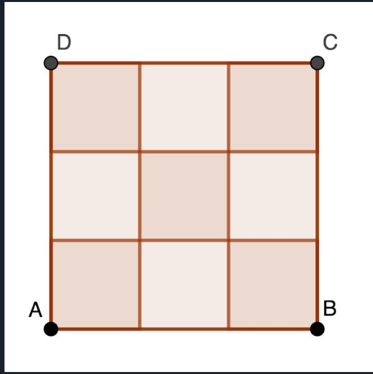
Un altro frattale, molto simile per costruzione ai frattali di Sierpinski, è la cosiddetta scatola frattale. Essa è generata grazie a 5 trasformazioni geometriche, ossia 5 omotetie di rapporto 1/3.

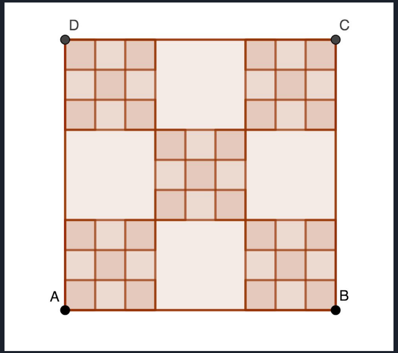
$n = 5$

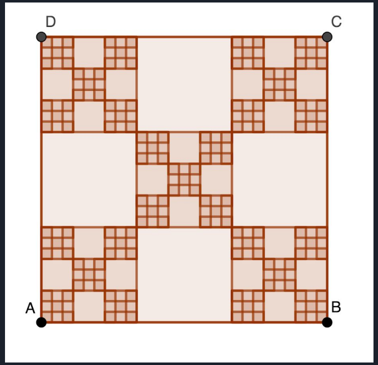
$\rho = 1/3$

$D=\log(n)/\log(1/\rho)$ $\rightarrow D = \log5/\log3 = 1{,}46$



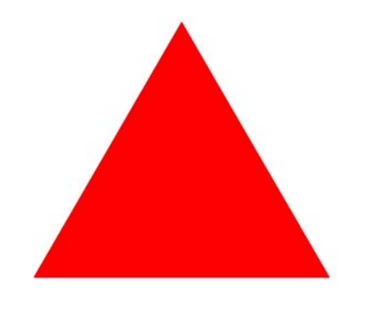


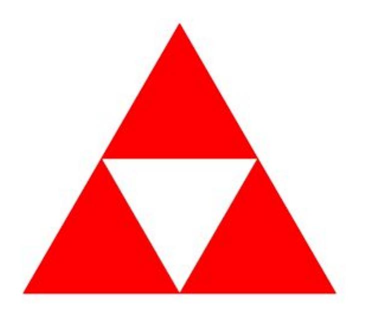


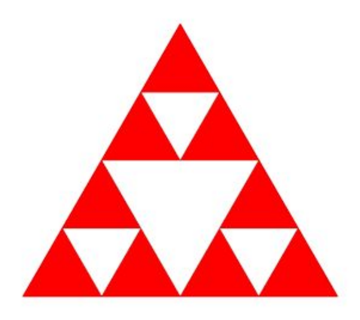


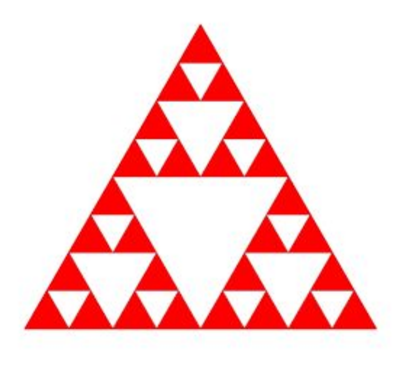
Il triangolo di Sierpinski (1882-1969) :

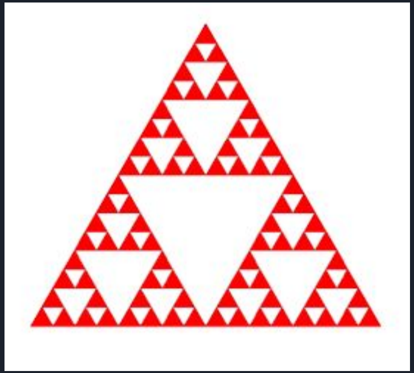
"Dato un triangolo equilatero pieno, lo si divida in 4 triangoli equilateri e si rimuova il triangolo centrale rivolto verso il basso. Rimangono 3 triangoli: ad ognuno di essi si applichi lo stesso procedimento all'infinito".



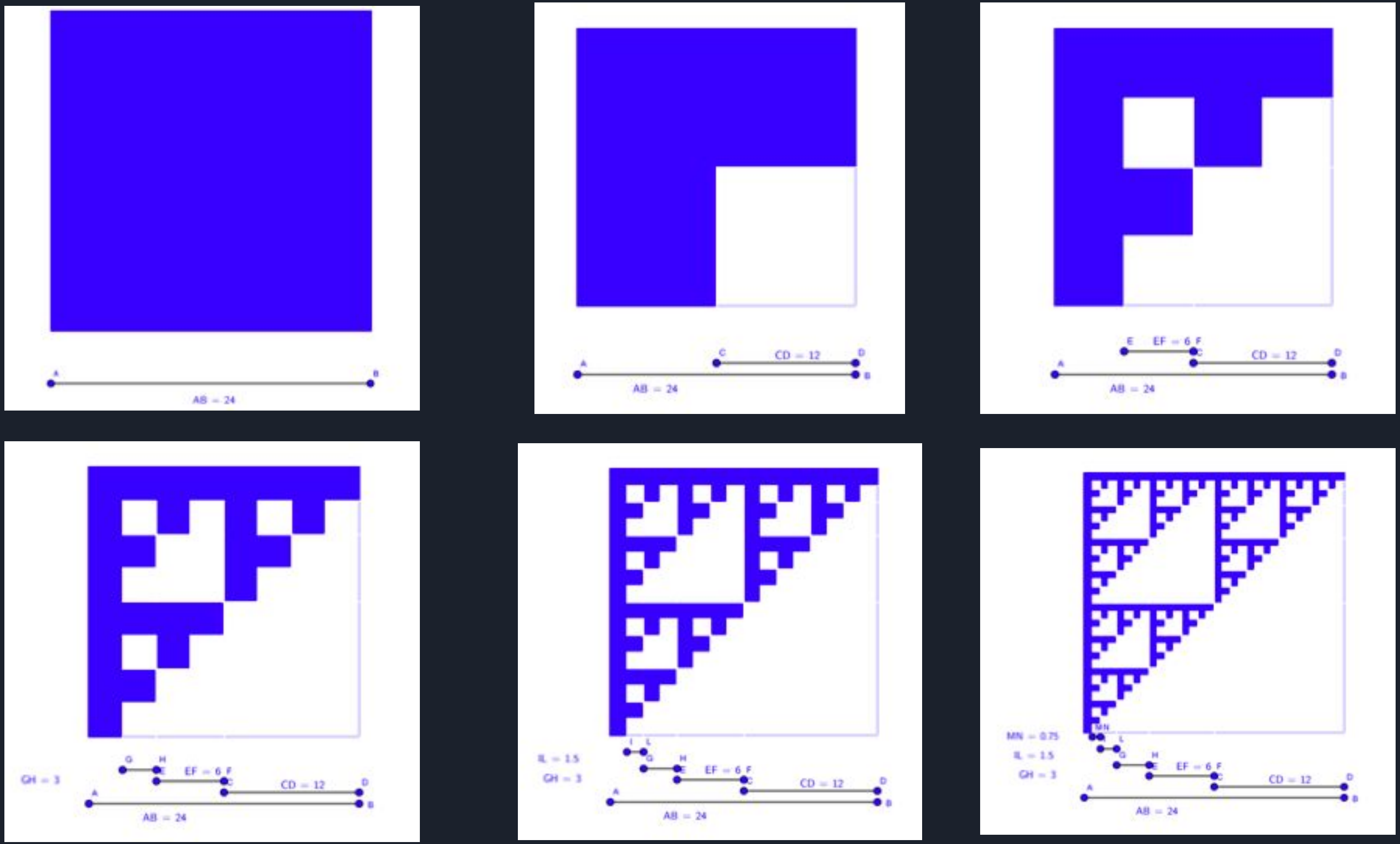


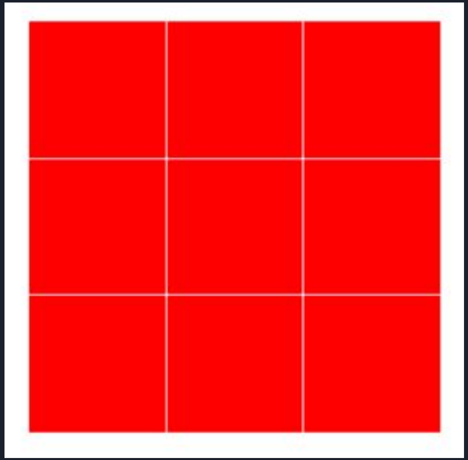


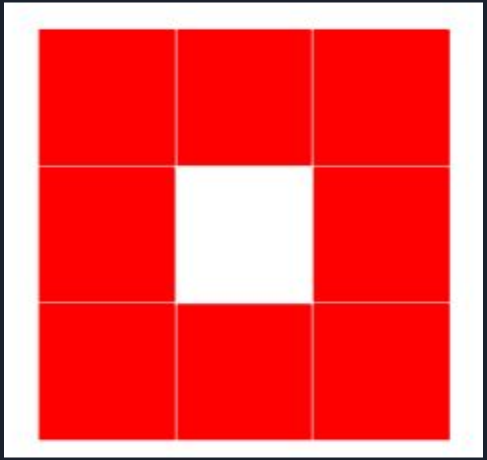


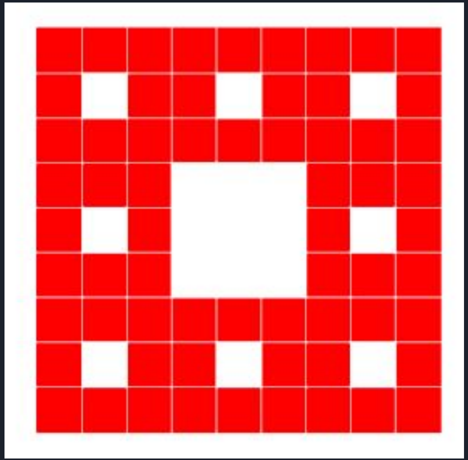


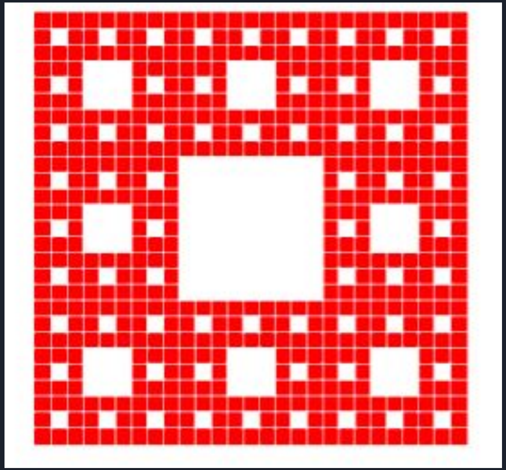
Il triangolo di Sierpinski si può ricavare anche in modo più semplice sottraendo dei quadrati, come nelle figure successive :







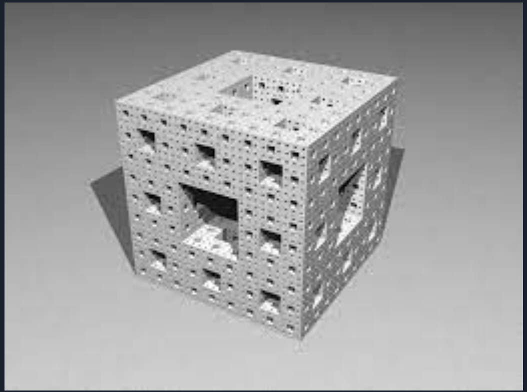




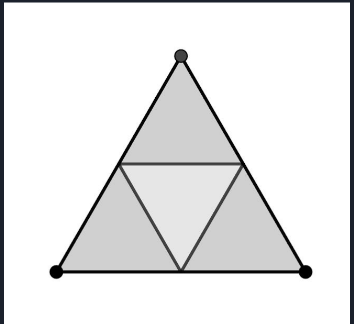
Il tappeto di Sierpinski

In matematica, il tappeto di Sierpinski è un frattale simile all'insieme di Cantor, ottenuto a partire da un quadrato, descritto dal matematico polacco Wactaw Sierpinski nel 1916.

La versione tridimensionale del tappeto è la spugna di Menger.



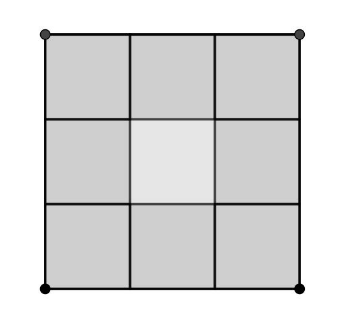
Proviamo a calcolare la dimensione frattale D del triangolo e del tappeto di Sierpinski :



$n = 3$

$\rho = 1/2$

$D=\log(n)/\log(1/\rho)$ $\rightarrow$ $D = \log 3/\log 2 = 1{,}58$



$n = 8$

$\rho = 1/3$

$D=\log(n)/\log(1/\rho)$ $\rightarrow$ $D = \log 8/\log 3 = 1{,}89$

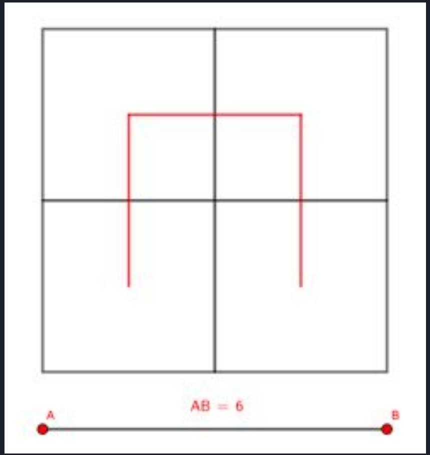
La curva di Hilbert (1862-1943)

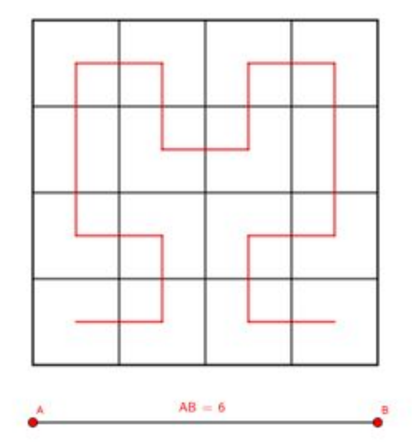
La **curva di Hilbert** è una curva frattale continua che riempie il piano descritto inizialmente dal matematico tedesco David Hilbert nel 1891,come una variante delle curve che riempiono il piano scoperto per Giuseppe Peano nel 1890.

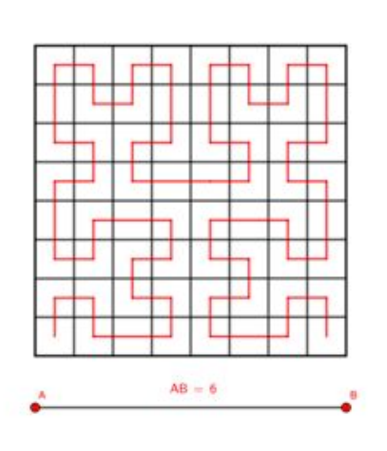
n = 4

ρ = 1/2

D=log(n)/log(1/ρ) → D = log4/log2 = 2







MANDELBROT

Benoit Mandelbrot è stato un matematico nato nel 1924 a Varsavia da una famiglia ebrea borghese. A causa degli avvenimenti storici della seconda guerra mondiale, fu costretto a spostarsi con la famiglia prima in Francia e successivamente in America.

Egli scoprì il suo frattale quasi per caso, con l’aiuto della computer-grafica, partendo dal frattale di Gaston Julia del 1918.

Nel 1973 Mandelbrot pubblicò in Francia un saggio, intitolato “Les Objets Fractals”, nel quale descriveva in termini grafici le forme naturali, spiegando attraverso un rigoroso modello matematico la loro complessità e fondando così la **geometria frattale**.

Mandelbrot, il genio dei frattali : https://www.youtube.com/watch?v=9sVLMGm4Pgc

Gli insiemi di Julia

Le basi teoriche che resero possibile la scoperta dell'insieme di Mandelbrot, detto anche insieme M, furono sviluppate nella seconda decade del secolo scorso dai matematici francesi Gaston Julia e Pierre Fatou. Julia fu il primo nel 1918 ad avere compiuto studi di questo genere mentre si trovava in un ospedale militare, convalescente per le ferite riportate durante la prima guerra mondiale.

Questi due matematici furono i pionieri dello studio delle iterazioni con numeri complessi e i loro risultati furono la base sulla quale venne poi costruita la successiva geometria frattale.

Gaston Julia

Pierre Fatou

Fra gli altri aspetti, Julia e Fatou studiarono il comportamento dei numeri complessi quando l'iterazione consiste nell'elevarli al quadrato e sommare al risultato una costante. Simbolicamente, diremo :

$$z_{n+1}=z_n^2+c$$

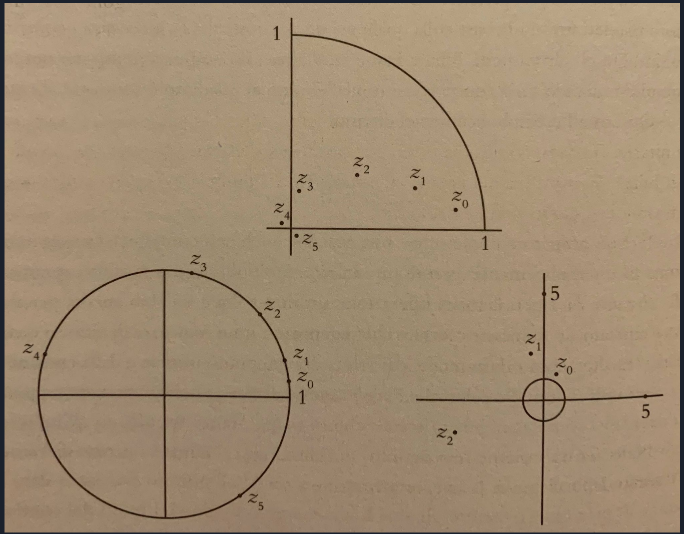
dove *z* è un numero complesso e *c* una costante anch'essa complessa.

Caratteristiche degli insiemi di Julia

Nel 1906, Fatou dimostrò che l'applicazione di questa iterazione su tutti i punti del piano complesso genera orbite che in maggioranza terminano all'infinito, salvo che per un insieme ben definito di punti, oggi chiamato insieme di Fatou. A questo tipo di punti la cui iterazione non tende all'infinito possiamo dare il nome di "**prigionieri**", mentre gli altri li chiameremo "**fuggitivi**". I punti del confine fra gli uni e gli altri, i "**guardiani**", ricevono il nome di **insieme di Julia**.

L'iterazione dipende da un particolare teorema: <u>se la dimensione di z iterato raggiunge 2, si perde nell'infinito senza possibilità di ritorno</u>: ciò distingue i punti esterni e quelli interni all'insieme. Solitamente si lasciano 100 iterazioni per raggiungere la dimensione 2. Una volta raggiunto 2, la grandezza aumenta molto rapidamente e raggiunge valori elevati velocemente e in poche iterazioni.

Le velocità diverse con cui i vari iterati di z superano il valore di soglia, possono essere colorate con colori diversi. È con questa tecnica che si producono le varie e colorate immagini frattali.

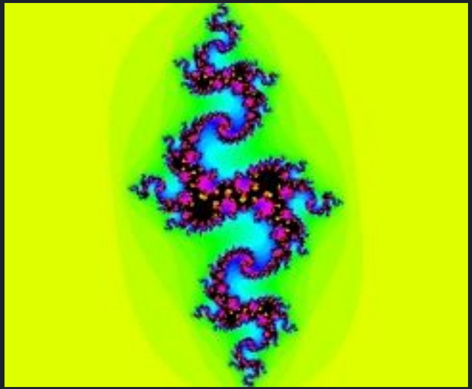


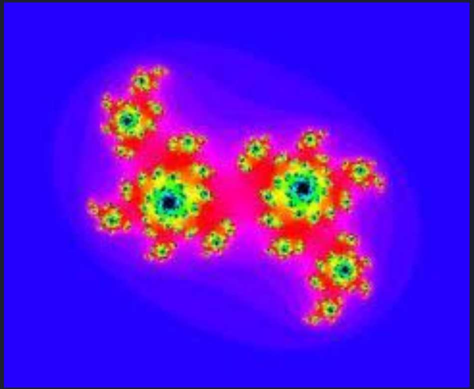
Frattali connessi e disconnessi

Dall'analisi di queste figure risulta evidente che esistono due classi principali di insiemi di Julia: quelli nei quali il corpo è formato da un solo pezzo (si dice che l'area del corpo è connessa) e quelli nei quali il corpo è smembrato in infiniti raggruppamenti di punti che appaiono più o meno isolati (l'area del corpo è disconnessa).

Questa distinzione geometrica dà luogo alla possibilità di separare i valori della *costante c* (parametro complesso) in due insiemi ben differenziati : quelli in cui l'iterazione $z_{n+1}=z_n^2+c$ dà luogo a figure connesse e quelli che originano figure disconnesse.

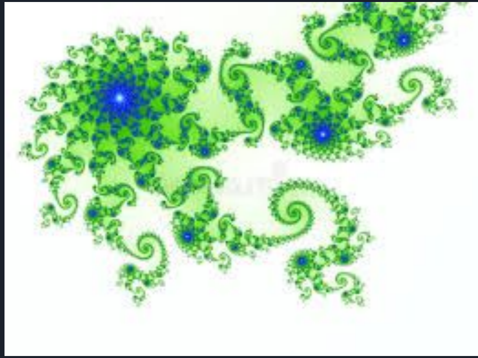
frattale connesso

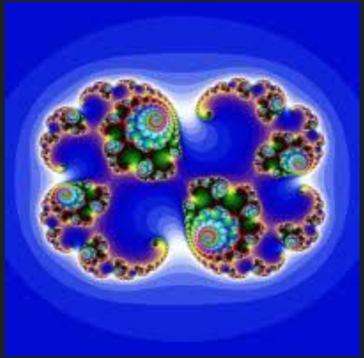




frattale disconnesso

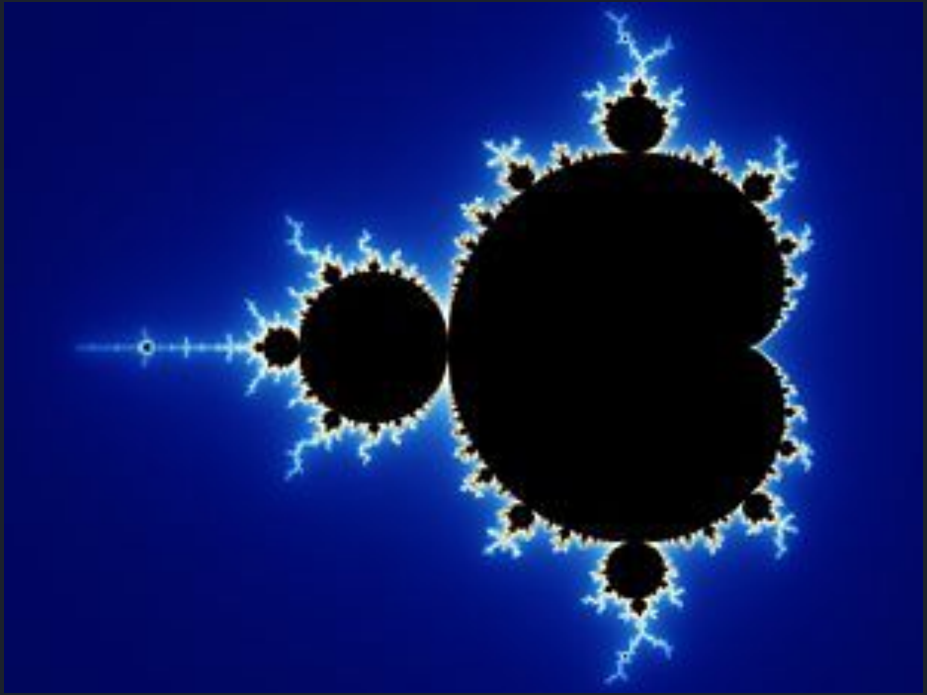
Esistono infiniti insiemi di Julia poiché la scelta di c non deve sottostare a nessuna restrizione





L'insieme di Mandelbrot

Nel mese di agosto del 1985 la copertina di Scientific American riportava un'affascinante e indecifrabile figura: era la prima volta che l'insieme di Mandelbrot finiva in prima pagina. Lo studio di questo insieme, definito nell'articolo come l'oggetto più complesso della matematica, segna la nascita della geometria frattale. Le sue proprietà erano note a Mandelbrot già agli inizi degli anni Settanta, ma la prima immagine fu realizzata solo nel 1978.

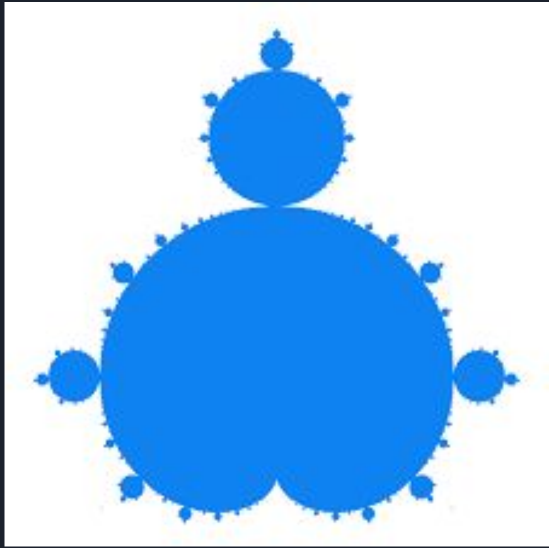


L’insieme di Mandelbrot

Mandelbrot si basò per il suo frattale sul teorema dell'insieme di Julia secondo cui : le orbite dei punti divergono se in qualche momento superano il cerchio di raggio 2.

Mandelbrot utilizzò questa proprietà dell'iterazione quadratica e si dedicò a localizzare i valori della costante c che danno luogo a insiemi di Julia connessi. Trovò allora che questo insieme di valori della costante c aveva una struttura sorprendente quando veniva rappresentata nel piano di Gauss.

Si trattava dell'insieme di Mandelbrot, che possiamo descrivere a grandi linee come un cardioide, ossia una figura a forma di cuore, con un'infinità di dischi tangenti. L'insieme totale è costituito da un solo pezzo, il che vale a dire che è connesso.



Come abbiamo visto per gli insiemi di Julia, anche l'insieme di Mandelbrot è generato da un'iterazione apparentemente semplice: $z_{n+1}=z_n^2+c$ *con z e c numeri complessi*

Partendo da un valore iniziale z_0 con c fissato, si calcola $z_1 = z_0^2 + c$, lo si inserisce nuovamente al posto di z, ottenendo $z_2 = z_1^2 + c$ e così via: ad ogni passo, il numero si ottiene da quello precedente.

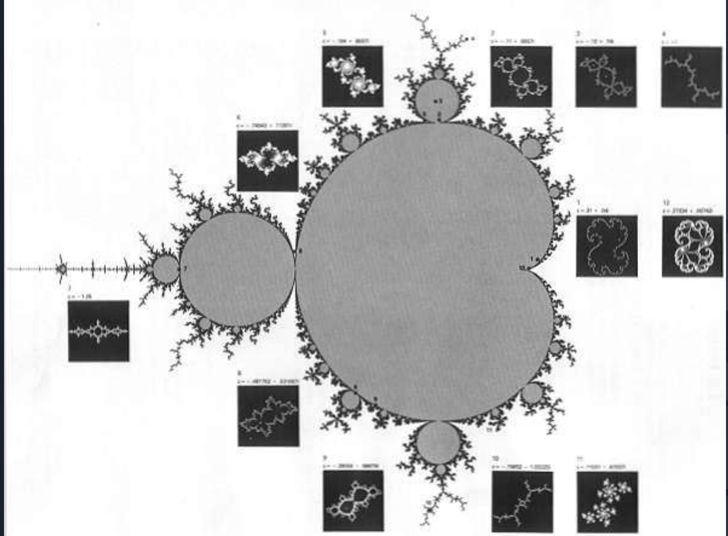
$$\boxed{\begin{array}{l} z_{n+1} = z^2{}_n + c \\ z_0 = 0 \end{array}}$$

Al variare di z_0, l'iterazione divide il piano complesso in due regioni complementari: una in cui la successione rimane confinata e un'altra da cui si allontana per sempre. La frontiera che separa queste due regioni assume le eleganti forme frattali dell'insieme di Julia. Se si fissa z_0 e si cambia c, cambia l'insieme di Julia, che può essere connesso oppure disconnesso.

Nel primo caso (insieme connesso) si colora *c*, nel secondo caso (insieme disconesso) lo si lascia bianco. Il risultato, sondando con *c* l'intero piano di Gauss, è l'insieme di Mandelbrot. Le immagini colorate sono generate allo stesso modo, ma con colori che cambiano con la distanza, per apprezzare meglio il bordo degli insiemi.

La costruzione dell'insieme di Mandelbrot può essere semplificata grazie a un risultato già noto ai matematici Julia e Fatou: per stabilire se *c* appartiene all'insieme di Mandelbrot non è necessario generare per ogni *c* il relativo insieme di Julia e valutarne la natura (connesso o polvere), ma basta partire con $z_0 = 0$ e vedere se la successione {0, *c*, *c*2 + *c*, (*c*2 + *c*)2 + *c*, ...} converge. Se converge, l'insieme di Julia è connesso e *c* è nell'insieme (sarà nero); se diverge, l'insieme di Julia è non connesso e *c* non è nell'insieme (sarà bianco).

Insieme di Mandelbrot con diversi insiemi di Julia evidenziati vicino al valore di c che li genera



Applicazioni dei Frattali

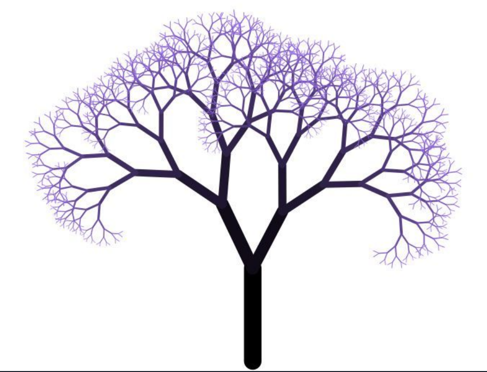
Negli anni '80 con la geometria frattale si sono trovati frattali in ogni ambito: dalla natura, alla medicina, alla musica. I frattali trovano applicazione nei film virtuali, nello studio dei terremoti, degli uragani, della formazione dei fulmini, del DNA, del cuore, dei vasi sanguigni, del moto ondoso degli oceani.

In particolare, i frattali si sono dimostrati sorprendentemente utili nello studio di oggetti fisici frastagliati, come coste o corsi d'acqua.

L'esempio classico è quello delle coste: più si ingrandisce la scala, più le coste si mostrano frastagliate, con dettagli prima invisibili, un po' come succede con un frattale. Non a caso il primo esempio citato da Mandelbrot nel suo libro fa riferimento alla costa della Gran Bretagna.

I frattali e la natura

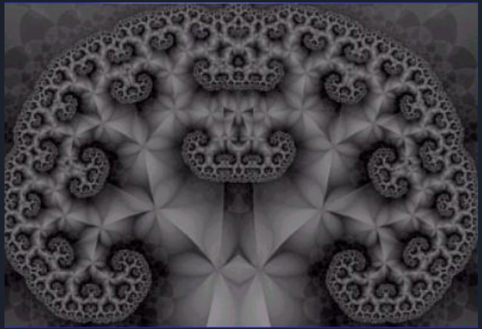
La natura produce molti esempi di forme molto simili ai frattali. Ad esempio in un albero ogni ramo è approssimativamente simile all'intero albero e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo, e così via. Gli elementi naturali che più si avvicinano al concetto matematico di frattale sono il profilo geomorfologico delle montagne, i cristalli di ghiaccio, alcune foglie e fiori (un esempio è la felce), oppure un classico esempio è il “broccolo romano”.



Ovviamente una costa, una foglia o un broccolo non sono frattali nel senso matematico: manca una perfetta regolarità e l’ingrandimento non può proseguire all’infinito.

I frattali e la medicina

Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano corrispondenze con la struttura della mente, è per questo che la gente li trova così familiari.

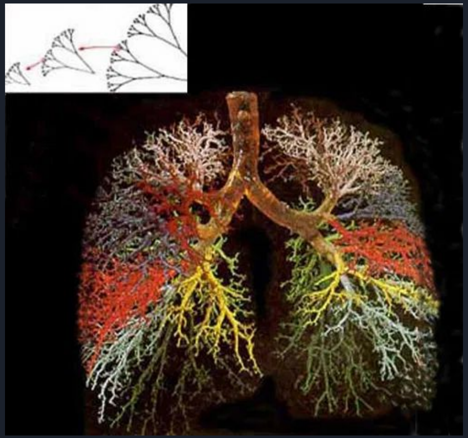


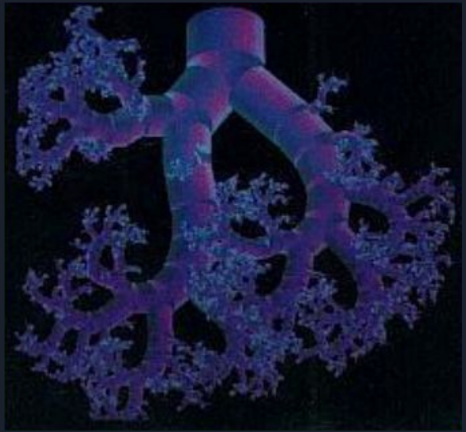
cervello umano

Una delle domande che più spesso vengono poste, parlando di natura e frattali chiede come mai proprio queste strutture sono state scelte dalla selezione naturale.

Perché la loro costituzione consente di comprimere nel minimo spazio grandi estensioni di superficie. Basti pensare alle strutture bronchiali e alveolari dei polmoni che pur in volume limitato occupano, per sviluppo di superficie, uno spazio enorme: nell'uomo quasi la superficie di un campo da tennis.

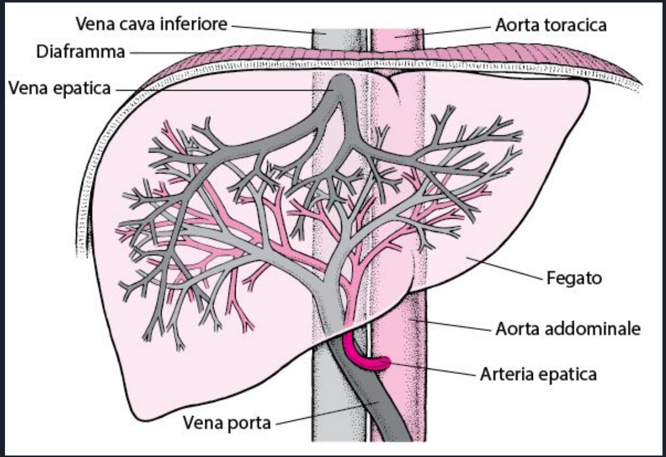
Il vantaggio in questo caso è che in uno spazio relativamente modesto è possibile massimizzare un processo vitale come lo scambio gassoso tra il sistema respiratorio e quello circolatorio.

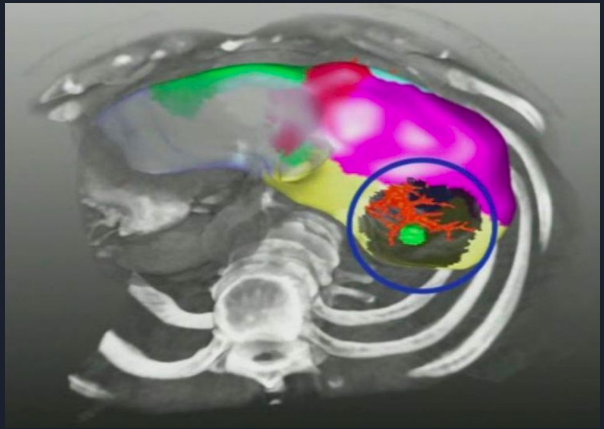




polmoni

La struttura geometrica della vena porta, che si trova nel fegato, è quella di un albero frattale :





La struttura suddivide il fegato in diversi lobi. Ogni lobo è irrorato da una specifica ramificazione della vena porta. Uno di questi rami irrora un'area particolare del fegato che ha dei confini molto netti perciò se c'è un tumore si potrebbe individuare in quale specifico lobo si è formato. In tal modo si può asportare chirurgicamente solo la parte malata. In altri termini se un albero ha un ramo malato si elimina solo quello senza danneggiare il resto della pianta. Con questo metodo il paziente viene sottoposto alla TAC. Successivamente utilizzando vari strumenti di calcolo della geometria frattale a partire dalla versione ridotta della vena porta si può risalire alla sua versione complessiva. In tal modo si ottiene un'immagine completa dei diversi lobi del fegato.

- **Arte**

Per la loro bellezza, i frattali hanno suscitato grande interesse estetico oltre che scientifico: è addirittura nato un filone chiamato “arte frattale”. Per realizzare un’opera di arte frattale basta avere a disposizione un computer e un apposito software: si stabiliscono i parametri matematici e il programma disegna il frattale, che poi l’artista/programmatore colora a piacimento.

- **Cinema**

L’arte frattale è stata usata anche al cinema: per esempio per il film del 2009 “Avatar”, oppure per la realizzazione delle tempeste di neve nel cartone animato “Frozen”, il cui enorme successo mondiale è dovuto in parte anche alla sua spettacolarità visiva.